الأستاذ : الحيان	الحسابيات	الثانية بكالوريا علوم رياضية

التمرين 1 :

1) بين أن : $\forall n \in IN : 2^{3n+5} + 3^{n+1} \equiv 0[5]$.

2) بين أن : $\forall n \in IN : n^5 - n \equiv 0[30]$.

3) حدد باقي القسمة الأقليدية للعدد $16^{2^{1000}}$ على 7 .

4) حدد باقي القسمة الأقليدية للعدد $19^{52} \times 23^{41}$ على 7 .

التمرين 2 :

ليكن A مجموع أرقام العدد 4444^{4444} (في نظمة العد العشري) وليكن B مجموع أرقام العدد A وليكن C مجموع أرقام العدد B .

1) بين أن كل عدد صحيح طبيعي N يوافق مجموع أرقامه (في نظمة العد العشري) بترديد 9 .

2) حدد قيمة العدد الصحيح الطبيعي C .

التمرين 3 :

1) ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين بحيث : $a \geq 2$ و $b \geq 2$.

بين أن : $\exists!(u_0, v_0) \in IN^2 / u_0 a - v_0 b = 1$ و $u_0 < b$ و $v_0 < a$.

ثم حدد , بدلالة u_0 و v_0 و a و b , جميع الأزواج $(u,v) \in Z^2$ التي تحقق المعادلة : $ua - vb = 1$.

2) حدد عددين نسبيين u و v بحيث : $47u + 111v = 1$.

التمرين 4 :

أعداد ميرسين – أعداد فيرما

1) أعداد ميرسين: ليكن $a \geq 2$ و $n \geq 2$ عددين صحيحين .

بين أنه إذاكان $a^n - 1$ عددا أوليا فإن $a = 2$ و n أولي .

2) أعداد فيرما : ليكن $n \in IN^*$. بين أنه إذاكان $2^n + 1$ أوليا فإن n قوة للعدد 2 .

3) نضع $\forall n \in IN : F_n = 2^{2^n} + 1$ (أعداد فيرما)

أ) بين أن الأعداد $(F_n)_{n \in IN}$ أولية فيما بينها مثنى مثنى .

ب) استنتج أن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

التمرين 5 :

نعتبر العددين الصحيحين الطبيعيين A و B الممثلين في نظمة العد ذات الأساس 9 بما يلي : $A = \overline{abcd}_{(9)}$ و $B = \overline{bcda}_{(9)}$ حيث a و b غير منعدمين , ونعتبر في كل ما يلي أن العدد B قابل للقسمة على 7 .

1) بين أنه إذاكان $a = 7$ فإن A قابل للقسمة على 7 .

2) أ) بين أن العدد $9A - a$ قابل للقسمة على 7 .

ب) استنتج أنه إذاكان A قابلا للقسمة على 7 فإن $a = 7$.

3) أ) حل المعادلة $7x - 4y = 1$ في $Z \times Z$.

ب) نضع $c = 0$ و $d = 1$.

حدد العدد A كي يكون قابلا للقسمة على 7 .

التمرين 6 :

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين .

1) بين أن : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (ab) \wedge (a+b) = 1$.

2) نعتبر في IN^2 النظمة التالية: $(S): \begin{cases} x \wedge y = 2 \\ (x+y)/(x^2+y^2) \end{cases}$

(الرمز d / D يعني: d يقسم D أو D قابل للقسمة على d)

أ) نضع $x = 2x'$ و $y = 2y'$ بحيث $x' \wedge y' = 1$.

بين أن : $(x'+y')/4$.

ب) حل في IN^2 النظمة (S) .

التمرين 7 :

1) أ) حل المعادلة : $(p,q) \in Z^2 \ , \ 11p - 7q = 2$.

ب) استنتج مجموعة حلول المعادلة : $(p,q) \in Z^2 , 7p - 11q = 2$

ج) حل المعادلة : $(p,q) \in Z^2 , 11p - 7q \equiv 2[77]$.

2) نعتبر المعادلة (E) التالية : $(E) : x \in Z/77Z , x^2 = \bar{1}$.

أ) بين أن : x حل للمعادلة (E) $\Leftrightarrow$

$x \in \{\bar{1}, \overline{76}\}$ أو $\exists (p,q) \in Z^2 : \begin{cases} x + \bar{1} = \overline{11p} \\ x - \bar{1} = \overline{7q} \end{cases}$

أو $\exists (p,q) \in Z^2 : \begin{cases} x + \bar{1} = \overline{7p} \\ x - \bar{1} = \overline{11q} \end{cases}$

ب) حل المعادلة (E) .

التمرين 8 :

- I أوجد في نظمة العد العشري العددين الصحيحين الطبيعيين اللذين يكتبان في نظمة العد ذات الأساس 5 على الشكل $\overline{n01n}_{(5)}$ حيث n عدد صحيح طبيعي أولي .

II -1) ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين بحيث :

$(a+b) \wedge ab = p^2$ و p عدد صحيح طبيعي أولي .

أ) بين أن : p^2 / a^2 واستنتج أن p / a و p / b .

ب) بين أن : $a \wedge b = p$ أو $a \wedge b = p^2$.

2) نعتبر في IN^2 النظمة (S) التالية : $(S): \begin{cases} (a+b) \wedge ab = 49 \\ a \vee b = 231 \end{cases}$

أ) بين أن : $a \wedge b = 7$.

ب) حل في IN^2 النظمة (S) .

($a \wedge b$ يرمز للقاسم المشترك الأكبر ل a و b , و $a \vee b$ يرمز للمضاعف المشترك الأصغر ل a و b) .

التمرين 9 :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا وليكن العدد الصحيح الطبيعي u_n بحيث :

$$\forall n \in IN : u_n = 2^n + 5^n$$

1) بين أن : $\forall n \in IN : u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n$.

2) بين أن كل قاسم مشترك للعددين u_n و u_{n+1} يقسم العددين 3×2^n و 3×5^n .

3) بين أن u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما .

التمرين 10 :

1) حل في $IN^* \times IN^*$ النظمة : $\begin{cases} x \wedge y = 3 \\ x \vee y = 45 \end{cases}$.

2) أ) ماهي الأعداد الصحيحة الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 1998.

ب) حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية x و y التي تحقق :

$$(x \vee y)^2 - 3(x \wedge y)^2 = 1998$$

التمرين 11 :

1) ليكن m و n عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين حيث: $m \wedge n = 1$.

أ) بين أن : $2m^2 + n^2 \not\equiv 0[5]$ (أي أن $2m^2 + n^2$ غير موافق للعدد 0 بترديد 5) .

ب) استنتج أن : $(2m^2 + n^2) \wedge 5 = 1$.

2) نعتبر المعادلة: $(E): x \in IR, 2x^3 + x - 5 = 0$

أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا وحيدا α حيث: $1 < \alpha < 2$.

ب) نفترض أن : $\alpha = \frac{m}{n}$ حيث m و n عددان صحيحان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

i) تحقق أن : $(2m^2 + n^2)m = 5n^3$.

ii) بين أن : $m = 5$.

ج) استنتج أن العدد α ليس جذريا .

التمرين 12 :

ليكن a و b عددين نسبيين بحيث $a \wedge b = 1$. نضع $c = a^4 + b^4$

1) أ) ليكن x عددا نسبيا .

بين أنه إذاكان x زوجيا , فإن $x^4 \equiv 0[16]$

بين أنه إذاكان x فرديا , فإن $x^4 \equiv 1[16]$

ب) استنتج أن : $c \equiv 1[16]$ أو $c \equiv 2[16]$.

2) ليكن p عددا أوليا قاسما للعدد c بحيث $2 < p$.

أ) بين أن : $a \wedge p = 1$.

ب) بين أن : $\exists k \in Z / ka \equiv 1[p]$.

ج) استنتج أن : $\exists q \in Z / q^4 + 1 \equiv 0[p]$.

التمرين 13 :

1) حل في $Z \times Z$ المعادلة : $5x - 7y = 5$.

2) حدد الأعداد الصحيحة النسبية x بحيث : $\begin{cases} x \equiv 0[5] \\ x \equiv 5[7] \end{cases}$

3) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا , كتابته في نظمة العد ذات الأساس 6 هي $n = \overline{\alpha 30002\beta}$. حدد α و β لكي يكون n قابلا للقسمة على 35 .

التمرين 14 :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

1) بين أن $n^2 + 5n + 4$ و $n^2 + 3n + 2$ يقبلان القسمة على $n+1$.

2) حدد قيم n التي من أجلها يقبل العدد $3n^2 + 15n + 19$ القسمة على $n+1$.

3) استنتج أنه مهما يكن n من IN فإن $3n^2 + 15n + 19$ لا يقبل القسمة على $n^2 + 3n + 2$.

التمرين 15 :

1) بين أن لكل n من IN , العدد $24n^2 + 8n$ يقبل القسمة على16 .

2) استنتج أن : $(2n+1)^4 \equiv 1[16]$.

3) بين أن : $\forall a \in IN : a^4 \equiv 0[16]$ أو $a^4 \equiv 1[16]$

4) استنتج أنه إذاكان $16n + 15 = x_1^4 + x_2^4 + ... + x_k^4$ بحيث x_1 و x_2 و ... و x_k أعداد صحيحة طبيعية فإن $k \geq 15$.

التمرين 16 :

حل في Z النظمة : $\begin{cases} x \equiv 4[7] \\ x \equiv 5[11] \\ x \equiv 6[13] \end{cases}$

التمرين 17 :

1) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

أ) بين أنه إذاكان n فرديا فإن : $n^2 \equiv 1[8]$.

ب) بين أنه إذاكان n زوجيا فإن : $n^2 \equiv 0[8]$ أو $n^2 \equiv 4[8]$.

2) لتكن a و b و c أعداد صحيحة طبيعية فردية .

أ) بين أن : $a^2 + b^2 + c^2$ ليس مربعا كاملا (أي ليس مربعا لعدد صحيح)

ب) بين أن : $2(ab + bc + ca) \equiv 6[8]$. (يمكنك ملاحظة أن: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$)

ج) استنتج أن $2(ab + bc + ca)$ ليس مربعا كاملا .

د) بين أن $ab + bc + ca$ ليس مربعا كاملا .

التمرين 18 :

1) حل في $Z \times Z$ المعادلة : $(E): 3x - 2y = 1$

2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

أ) بين أن الزوج $(14n+3, 21n+4)$ حل للمعادلة (E).

ب) استنتج أن العددين $14n+3$ و $21n+4$ أوليان فيما بينهما .

3) ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $2n+1$ و $21n+4$.

أ) بين أن : $d = 1$ أو $d = 13$.

ب) بين أن : $d = 13 \Leftrightarrow n \equiv 6[13]$.

4) من أجل كل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n \geq 2$, نضع : $A = 21n^2 - 17n - 4$ و $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$

أ) بين أن العددين A و B قابلان للقسمة على $n-1$ في مجموعة الأعداد النسبية .

ب) حدد حسب قيم n , القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين 19 :

نعتبر في $(IN^*)^2$ المعادلة : $(E): x^2(x^2 + 7) = y(2x + y)$

ليكن (x, y) عنصرا من $(IN^*)^2$ وليكن $\delta = x \wedge y$.

نضع : $x = \delta a$ و $y = \delta b$.

1) نفترض أن (x, y) حل للمعادلة (E) .

أ) تحقق أن : $a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a + b)$.

ب) استنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $\delta^2 a^2 + 7 = kb$ و $2a + b = ka^2$

ج) بين أن : $a = 1$.

د) استنتج أن : $(b+1)^2 = \delta^2 + 8$.

2) حل في $(IN^*)^2$ المعادلة (E) .

الثانية بكالوريا علوم رياضية	الحسابيات	الأستاذ : الحيان

التمرين 1 :

لكل عددين نسبيين غير منعدمين u و v, نرمز ب $\Delta(u,v)$ للقاسم المشترك الأكبر للعددين u و v .

1) بين أنه إذاكان $\Delta(u,v)=1$ فإن :

$\Delta(u^2+v^2,u)=1$ و $\Delta(u^2+v^2,v)=1$ و $\Delta(u^2+v^2,uv)=1$.

2) نعتبر في $\left(Z^*\right)^3$ المعادلة : $(1):(x^2+y^2)z=26xy$

أ) بين أنه إذاكان $\Delta(x,y)=1$ فإنه يوجد يوجد عدد نسبي t بحيث :

$(x^2+y^2)t=26$.

ب) حدد جميع المثلوثات (x,y,z) التي تحقق المعادلة (1) بحيث :

$\Delta(x,y)=1$.

ج) استنتج مجموعة المثلوثات (x,y,z) التي تحقق المعادلة (1) .

التمرين 2 :

لتكن a و b و A و B أعداد صحيحة طبيعية بحيث :

$A=11a+2b$ و $B=18a+5b$

1) أ) أحسب $7A+B$ بدلالة a و b .

ب) بين أنه إذاكان أحد العددين A أو B قابلا للقسمة على 19 , فإن الآخر يكون أيضا قابلا للقسمة على 19 .

2) بين أنه إذاكان a و b أوليان فيما بينهما, فإن القاسم المشترك الأكبر للعددين A أو B هو 1 أو 19 .

التمرين 3 :

1) ليكن m و n عددين صحيحين طبيعيين أوليين فيما بينهما .

أ) بين أن $m+n$ و mn أوليان فيما بينهما .

ب) أثبت أن أحد العددين $m+n$ و mn فردي والآخر زوجي .

2) ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين , وليكن M و Δ على التوالي المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر لهما . نضع : $a=\frac{x}{\Delta}$ و $b=\frac{y}{\Delta}$.

أ) بين أن : $\begin{cases}(a+b)ab=120\\ ab=\Delta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=120\\ M=\Delta^2\end{cases}$

ب) حل النظمة : $\begin{cases}x+y=120\\ M=\Delta^2\end{cases} : (x,y)\in\left(IN^*\right)^2$

التمرين 4 :

1) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم . نضع :

$u=(n+1)(2n+1)$ و $v=n(2n+1)$

أ) أوجد Δ القاسم المشترك الأكبر و M المضاعف المشترك الأصغر للعددين u و v .

ب) تحقق من أن : $\begin{cases}M(u+v)=\Delta uv\\ \Delta=u-v\end{cases}$

2) ليكن (x,y) عنصرا من IN^2 حيث : $x>y>0$

وليكن M و Δ على التوالي المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر للعددين x و y . نضع : $a=\frac{x}{\Delta}$ و $b=\frac{y}{\Delta}$.

أ) بين أن : $a+b=\Delta \Leftrightarrow M(x+y)=\Delta xy$.

ب) أوجد S مجموعة الأزواج (x,y) من IN^2 التي تحقق :

$\begin{cases}M(x+y)=\Delta xy\\ \Delta=x-y\end{cases}$

ج) لتكن S' مجموعة الأزواج (x,y) من IN^2 التي تحقق :

$(x-y)^2=x+y$.

i) أثبت أن : $S\subset S'$.

ii) هل $S=S'$ ؟ .

التمرين 5 :

1) لتكن a و b و k ثلاثة أعداد نسبية بحيث : $a\neq 0$ و $b\neq 0$.

بين أن : $a\wedge b=b\wedge(a-bk)$

($a\wedge b$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b)

2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $n\geq 4$.

نضع : $A=n^2-n-10$ و $B=n+4$.

أ) بين أن : $A\wedge B=B\wedge 10$.

ب) حدد قيم n التي من أجلها B يقسم A .

ج) نضع : $A'=\frac{A}{A\wedge B}$ و $B'=\frac{B}{A\wedge B}$.

i) بين أن :

$(A\wedge B=5$ و $A\vee B=300) \Leftrightarrow (A'B'=60$ و B' فردي$)$

ii) استنتج قيمة العدد الصحيح الطبيعي n بحيث :

$A\wedge B=5$ و $A\vee B=300$.

($A\vee B$ هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين A و B)

التمرين 6 :

ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين يحققان النظمة:

$\begin{cases}x^2+y^2=625\\ \Delta(x,y)=1\end{cases}$ حيث $\Delta(x,y)$ هو القاسم المشترك الأكبر لهما.

1) بين أن أحد العددين x و y زوجي والآخر فردي .

2) نفترض أن x عدد زوجي .

أ) بين أن : $\Delta(25-x,25+x)=1$.

ب) بين أنه يوجد عددان طبيعيان فرديان m و n بحيث :

$25+x=m^2$ و $25-x=n^2$ و $\Delta(m,n)=1$.

3) حدد العددين x و y .

4) استنتج انطلاقا مما سبق حلول المعادلة التالية:

$(X,Y)\in IN^*\times IN^*, X^2+Y^2=625$

التمرين 7 :

1) نضع : $a=pn$ و $b=p(n-1)$

حيث : $p\in IN^*$ و $n\in IN^*-\{1\}$.

بين أن : $a\wedge b=a-b$.

2) بين أنه إذاكان عددان طبيعيان غير منعدمين a و b يحققان $a\wedge b=a-b$, فإنه يوجد عددان طبيعيان n و p بحيث :

$a=pn$ و $b=p(n-1)$.

3) <u>تطبيق :</u> ليكن x و y من IN^* . نعتبر : $a=40x(3y+2)$ و $b=15x(8y+5)$ و $c=24x(5y+3)$.

أ) حدد : $a\wedge b$ و $b\wedge c$.

ب) تحقق من أن القاسم المشترك الأكبرللأعداد a و b و c هو x .

التمرين 8 :

نعتبر النظمة : $(S): x\in Z, \begin{cases} x\equiv 5[7] \\ x\equiv 1[4] \end{cases}$

1) حل المعادلة : $(E):(u,v)\in Z^2, 7u+4v=1$

2) ليكن (u_0,v_0) حلا للمعادلة (E) و x_0 حيث : $x_0=7u_0+20v_0$.
بين أن العدد x_0 حل للنظمة (S) من أجل كل حل (u_0,v_0) للمعادلة (E) .

3) حل النظمة : $x\in Z: \begin{cases} x\equiv 0[7] \\ x\equiv 0[4] \end{cases}$

4) استنتج حلول النظمة (S) .

التمرين 9 :

نعتبر المتتالية العددية $(a_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} a_0=2 \quad , \quad a_1=5 \\ a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n, n\in IN \end{cases}$$

A (1) حل المعادلة المميزة للعلاقة $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$
ثم استنتج أن : $\forall n\in IN: a_n=2^n+3^n$

2) أحسب : $\lim_{n\to+\infty} a_n$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

3) أ) أدرس بواقي القسمة الأقليدية للأعداد 2^n و 3^n على 5 (n عدد صحيح طبيعي)

ب) استنتج حلول المعادلة : $n\in IN: a_n\equiv 0[5]$

4) بين أن a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما لكل n من IN .

B (1) تحقق من أن a_m لا يكتب على شكل b^α (حيث b و α عددان صحيحان طبيعيان , و $\alpha\geq 2$) في كل حالة من الحالتين التاليتين :

أ) $m=1$.

ب) $m=3$.

2) نفترض أن m عدد صحيح طبيعي فردي و أولي مع 5 .

أ) بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $a_m=5S_k$ حيث
$S_k=2^{2k}+2^{2k-1}.(-3)+2^{2k-2}.(-3)^2+...+2.(-3)^{2k-1}+(-3)^{2k}$
(يمكن استعمال تعميل $2^{2k+1}+3^{2k+1}$)

ب) بين أن : $S_k\equiv m.2^{m-1}[5]$

ج) استنتج أن S_k لا يقبل القسمة على 5 .

د) هل يمكن تعميم نتيجة السؤال B (1) ؟ علل جوابك .

التمرين 10 :

$a\wedge b$ هو القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين a و b .

1) أ) بين أن لكل n من IN^* :
$(2n+1)\wedge n=1$ ثم $(2n+1)\wedge n^2=1$.

ب) استنتج أنه إذاكان n و d عنصرين من IN^* بحيث d يقسم $(2n+1)$, فإن : $d\wedge n^2=1$.

2) حدد مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث :
$(2n+1)\wedge 5=5$.

3) أ) بين أن لكل n من IN^* :
$$n^2(n^2+1)\wedge(2n+1)=(2n+1)\wedge 5$$
ب) استنتج مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث :
$n^2(n^2+1)\wedge(2n+1)=1$.

التمرين 11 :

1) بين أن : $\forall a\in IN: 10/a^5-a$

2) ليكن $(a,b)\in IN^2$.
بين أنه إذاكان a^5-b^5 يقبل القسمة على 10 , فإن a^2-b^2 يقبل القسمة على 20 .

3) حل في IN^2 النظمة : $\begin{cases} a^5-b^5\equiv 0[10] \\ a^2-b^2=720 \end{cases}$

التمرين 12 :

كل عدد طبيعي n ($n>1$) يكتب على شكل
$n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ حيث : $(p_i)_{1\leq i\leq k}$ أعداد أولية و مختلفة و $(\alpha_i)_{1\leq i\leq k}$ أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة .

1) برهن على أن عدد قواسم n هو :
$$\prod_{i=1}^{k}(1+\alpha_i)=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_k)$$

2) برهن على أنه إذاكان عدد صحيح طبيعي n يقبل 9 قواسم في IN فإن n يكون على شكل a^8 أو a^2b^2 حيث a و b عددان أوليان ومختلفان .

3) نريد أن نحدد الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي تحقق الشرطين :
$\boxed{i}$ $n=39p+1$ حيث p عدد أولي .
$\boxed{ii}$ n يقبل 9 قواسم في IN .

أ) برهن على أن n لا يمكن أن يكون على الشكل a^8 حيث a عدد أولي .

ب) برهن على أن p يأخذ إحدى القيم 5 أو 7 أو 41 .

ج) أوجد الأعداد الطبيعية التي تحقق $\boxed{i}$ و $\boxed{ii}$.

التمرين 13 :

$\boxed{I}$ α_1 و α_2 و... و α_k أعداد صحيحة طبيعية $(k>1, k\in IN)$

نضع : $\prod_{i=1}^{k}(1+\alpha_i)=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_k)$.

بين أن:

$$\left(\prod_{i=1}^{k}(1+\alpha_i)\in 2IN\right)\Leftrightarrow\left(\exists i\in\{1,...,k\}/\alpha_i\notin 2IN\right)$$

$\boxed{II}$